UFSC - ANÁLISE LINEAR (PAM) - 2014.2
1A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Resolva
$$y'\sqrt{1+t^2} + \frac{ty}{\sqrt{1+t^2}} = t, \quad y(0) = 1.$$

(2) Determine todas as curvas $r(x) = (x, y(x))$ tais que suas retas tangentes no ponto (x_0, y_0) são perpendiculares ao vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$.

(3) Seja $a \geq 0$, e considere a equação diferencial $y' = -\text{sen}\, x + \sqrt{y - \cos x}$ com $y(0) = a$. Encontre o valor de $a \geq 0$ tal que a equação diferencial possua duas soluções distintas. Em seguinda, determine essas soluções. (Dica: use a substituição $v = \sqrt{y - \cos x}$.)

(4) Resolva
$$y' = -\frac{6xy + 2y^2}{3x^2 + 4xy + 3y^2}.$$

(5) Seja $y_1(x)$ uma solução da equação diferencial com $p(x)$ e $q(x)$ contínuas
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$
Encontre uma fórmula (dependendo de $y_1(x)$ e $p(x)$) para uma outra solução linearmente independente, $y_2(x)$. Usando essa fórmula, encontre a solução geral da equação de Legendre
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$$

(6) Seja q uma constante positiva. Determine possíveis soluções particulares para a equação
$$y'' + qy = \cos 2t + e^t.$$

(7) Determine uma função $G(t)$ tal que a solução do problema
$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$
possa ser escrita na forma $y(t) = \displaystyle\int_0^t G(t-s)g(s)ds$.

(8) Resolva
$$y'' + 2y' + 2y = u_{\pi/2}(t)e^t + \delta(t - \pi/2),$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução

1. Divindo a equação por $\sqrt{1+t^2}$ obtemos

$$y' + \frac{t}{1+t^2}y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

O fator integrante desta equação é

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{t}{1+t^2}dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right) = \sqrt{1+t^2}.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}y\right) = t \Rightarrow y = \frac{t^2}{2\sqrt{1+t^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Como $y(0) = 1$, temos que $C = 1$ e portanto a solução é

$$y(t) = \frac{t^2/2+1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. Segue das hipóteses que $\nabla r = (1, y'(x)) \perp (x, y(x))$, logo

$$(1, y') \cdot (x, y) = x + yy' = 0 \Rightarrow yy' = -x \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = R, \quad R = 2C,$$

isto é, essas tais curvas são circunferências com centro na origem.

3. Usando a substituição $v = \sqrt{y - \cos x}$, temos (assumindo que $y \neq \cos x$)

$$v' = \frac{y' + \text{sen } x}{2\sqrt{y-\cos x}} \Rightarrow 2vv' = y' + \text{sen } x$$

$$\Rightarrow y' = 2vv' - \text{sen x} = -\text{sen x} + v \Rightarrow 2vv' = v$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{x}{2} + C, \quad C = \text{ constante.}$$

Logo

$$y = \cos x + \left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$

Agora veja que $\cos x$ é solução de

$$y' = -\text{sen } x + \sqrt{y - \cos x}$$

com $\cos 0 = 1$, logo se $a = 1$, então temos as seguintes soluções distintas

$$\cos x \quad \text{e} \quad y(x) = \cos x + \frac{x^2}{4}.$$

4. Podemos resolver essa equação de duas formas. Uma é escrevendo a equação na forma

$$y' = -\frac{6y/x + 2(y/x)^2}{3 + 4y/x + 3(y/x)^2}$$

e usando a substituição $v = y/x$, $xv' + v = y'$. Temos então

$$xv' + v = -\frac{6v + 2v^2}{3 + 4v + 3v^2} \Rightarrow xv' = -\frac{9v + 6v^2 + 3v^3}{3 + 4v^2 + 3v^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3 + 4v^2 + 3v^2}{3v + 2v^2 + v^3}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln|3v + 2v^2 + v^3| = -\ln x + C \Rightarrow 3v + 2v^2 + v^3 = Kx^{-3}.$$

Agora voltando para $y = xv$, temos

$$3\frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} = Kx^{-3} \Rightarrow 3x^2y + 2xy^2 + y^3 = K.$$

Outra forma de resolver é escrevendo na forma

$$(6xy + 2y^2)dx + (3x^2 + 4xy + 3y^2)dy = 0$$

e verificando que esta equação é exata. Portanto buscamos $f(x, y)$ tal que

$$f_x = 6xy + 2y^2, \quad f_y = 3x^2 + 4xy + 3y^2.$$

Temos

$$f(x, y) = \int f_x dx + C(y) = \int (6xy + 2y^2)dx + C(y) = 3x^2y + 2xy^2 + C(y)$$
$$\partial_y(3x^2y + 2xy^2 + C(y)) = f_y = 3x^2 + 4xy + 3y^2 \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 - K.$$

Portanto a solução geral é

$$3x^2y + 2xy^2 + y^3 = K.$$

5. Usando o método de redução de ordem, tentamos encontrar uma solução $y_2(x) = u(x)y_1(x)$. Temos então

$$y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$
$$\Rightarrow y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2 = u''y_1+(2y_1'+p(x)y_1)+u(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1) = u''y_1+(2y_1'+p(x)y_1),$$

pois $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1$. Queremos então encontrar $u(x)$ tal que

$$u''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1) = 0 \Rightarrow u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)u' = 0.$$

Tomando $w = u'$, obtemos

$$w' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)w = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)$$
$$\Rightarrow \ln w = -2\ln y_1 - \int_{t_0}^{x} p(t)dt \Rightarrow w(x) = y_1^{-2}\exp\left(-\int_{t_0}^{x} p(t)dt\right).$$

Logo

$$u(x) = \int w(s)ds = \int_{t_0}^{x} y_1(s)^{-2}\exp\left(-\int_{t_0}^{s} p(t)dt\right)ds$$
$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\int_{t_0}^{x} y_1(s)^{-2}\exp\left(-\int_{t_0}^{s} p(t)dt\right)ds$$

. Outra forma de escrever essa fórmula é

$$y_2(x) = c_1 y_1(x) \int y_1(x)^{-2} \exp\left(-\int p(x)dx\right) dx + c_2 y_1(x), \quad c_1, c_2 = \text{ constantes.}$$

Na equação de Legendre, $y_1(x) = x$ e $p(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$. Logo

$$\exp\left(-\int p(x)dx\right) dx = \exp\left(\int \frac{2x}{1-x^2} dx\right) = \exp\left(-\ln|1-x^2|\right) = \frac{1}{|1-x^2|}.$$

Portanto

$$y_2(x) = c_1 x \int \frac{1}{x^2|1-x^2|} dx + c_2 x,$$

que é a fórmula da solução geral.

6. Temos que, como $q > 0$, a solução da equação homogênea

$$y'' + qy = 0$$

é dada por

$$c_1 \cos\sqrt{q}t + c_2 \text{sen } \sqrt{q}t.$$

Portanto se $\sqrt{q} \neq 2$, pelo método dos coeficientes a determinar, tentamos uma solução da forma

$$y_p(t) = A\cos 2t + B\text{sen } 2t + Ce^t.$$

Segue que

$$y_p'' + qy_p = (-4A + qA)\cos 2t + (-4B + qB)\text{sen } 2t + C(1+q)e^t = \cos 2t + e^t$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{q-4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{1+q}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{q-4}\cos 2t + \frac{1}{1+q}e^t.$$

Agora se $q = 4$, então tentamos uma solução da forma

$$y_p(t) = At\cos 2t + Bt\text{sen } 2t + Ce^t.$$

Segue que

$$y_p'' + qy_p = (-4A + 2B)\cos 2t + (-4B - 2A)\text{sen } 2t + 5Ce^t = \cos 2t + e^t$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{10}, \quad C = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}t\cos 2t + \frac{1}{10}t\text{sen } 2t + \frac{1}{5}e^t.$$

7. Temos que a solção geral de $y'' + y = 0$ é

$$c_1 \text{sen } t + c_2 \cos t.$$

$$\Rightarrow W(\text{sen } t, \cos t) = -(\text{sen }^2 + \cos^2 t) = -1.$$

Logo aplicando o método de variação de parâmetros

$$y_p = \text{sen } t \int_0^t g(s)\cos s ds - \cos t \int_0^t g(s)\text{sen } s ds$$

$$y_p = \int_0^t (\text{sen } t \cos s - \cos t \text{sen } s)\, g(s) ds = \int_0^t \text{sen}(t-s) g(s) ds.$$

8. Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$(s^2+2s+2)\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_{\pi/2}(t) e^{t-\pi/2} e^{\pi/2}\} + \mathcal{L}\{\delta(t-\pi/2)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi/2 s}\left(\frac{e^{\pi/2}}{(s-1)(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2}\right).$$

Agora, aplicando frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{(A+B)s^2 + (2A-B+C)s + (2A-C)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = -\frac{3}{5}.$$

Escrevendo $s^2+2s+2 = (s+1)^2+1$, a solução é dada por

$$y(t) = \frac{u_{\pi/2}(t)}{5}\left[e^t(1-\cos(t-\pi/2) - 4\text{sen}(t-\pi/2)) + e^{t-\pi/2}\text{sen}(t-\pi/2)\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{u_{\pi/2}(t)e^t}{5}\left[1 - \text{sen} t + (4-e^{-\pi/2})\cos t\right].$$